Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Théme : Suites réelles

Exercice 1 type devoir

Exercice :

Soit la suite réelle (u_n) définie sur IR par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \end{cases}$

1°) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n^2}$.

a) Montrer que la suite v est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer v_n en fonction de n puis retrouver u_n en fonction de n.

3°) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) Calculer S_0, S_1 et S_2.

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}}$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \geq 2\left(\sqrt{n+2} - 1\right)$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

1) a)

- pour $n = 0$ $\quad 0 \leq u_0 = 1 \leq 1$ (vraie)
- Soit $n \in \mathbb{N}$. supposons que $0 \leq u_n \leq 1$

et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

- $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$ ($u_n \geqslant 0$, $\sqrt{u_n^2+1} > 0$) $\geqslant 0$
- $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} - 1$

$= \dfrac{u_n - \sqrt{u_n^2+1}}{\sqrt{u_n^2+1}} \times \dfrac{u_n + \sqrt{u_n^2+1}}{u_n + \sqrt{u_n^2+1}}$

$$= \frac{u_n^2 - u_n^2 - 1}{\sqrt{u_n^2+1}\left(u_n+\sqrt{u_n^2+1}\right)}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{u_n^2+1}\left(u_n+\sqrt{u_n^2+1}\right)} \leqslant 0$$

$\sqrt{u_n^2+1} \geqslant 0$; $u_n+\sqrt{u_n^2+1} \geqslant 0$

Donc $u_{n+1} \leqslant 1$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leqslant u_n \leqslant 1$

b) pour $n=0$; $u_0 = \frac{1}{\sqrt{0+1}} = 1$ (Vraie)

Soit $n \in \mathbb{N}$. supposons que $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ et montrons que $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$

On a $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}}$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$ ($\sqrt{n+1} \to +\infty$)

Donc (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{\frac{u_n^2}{u_n^2+1}} = \frac{u_n^2+1}{u_n^2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$; $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n^2+1}{u_n^2} - \frac{1}{u_n^2}$

$= \frac{u_n^2+1-1}{u_n^2} = \frac{u_n^2}{u_n^2} = 1$

Donc v est une suite arithmétique de raison

$r = 1$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0^2} = 1$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = v_0 + n.r$

et $v_0 = 1$ et $r = 1$

Donc $v_n = 1 + n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = \frac{1}{u_n^2}$

$\Rightarrow u_n^2 = \frac{1}{v_n}$

$\Rightarrow u_n = \frac{1}{\sqrt{v_n}}$ car $0 < u_n < 1$

$\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$; $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$

a) $\boxed{S_0 = u_0 = 1}$

$\boxed{S_1 = u_0 + u_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}}$

$\boxed{S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}$

b) $\forall k \in \mathbb{N}$; $\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \times \frac{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}$

$= \frac{k+2-(k+1)}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}$

$= \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}$

$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{k+2} \geqslant \sqrt{k+1}$

$\Rightarrow \sqrt{k+1} + \sqrt{k+2} \geqslant 2\sqrt{k+1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$

D'où $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}; \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}}}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}; \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$

D'où $\forall k \in \mathbb{N}; \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \leqslant \dfrac{1}{2} u_k$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\right) \leqslant \dfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} u_k$

$\Rightarrow (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \leqslant \dfrac{1}{2} S_n$

$\Rightarrow \sqrt{n+2} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2} S_n$

$\Rightarrow \boxed{S_n \geqslant 2\left(\sqrt{n+2} - 1\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

•) $\lim\limits_{n \to +\infty} 2\left(\underbrace{\sqrt{n+2}}_{\to +\infty} - 1\right) = +\infty$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty}$